一次元拡散過程に対する原点回避条件付け

AUTHOR(S):

矢野, 孝次; 矢野, 裕子

CITATION:

矢野, 孝次 ...[et al]. 一次元拡散過程に対する原点回避条件付け. 統計数理研究所共同研究リポート 2015, 350: 16-20

ISSUE DATE:

2015

一次元拡散過程に対する原点回避条件付け

矢野 孝次 (京都大学大学院理学研究科)
矢野 裕子 (京都産業大学理学部)

1 問題

$[0,\infty)$ を動く原点反射壁の一次元拡散過程に対し，原点回避条件付け

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\mathbb{P}_x[F_T; T_0 > \tau > T]}{\mathbb{P}_x(T_0 > \tau)} \tag{1.1}$$

を考察する．但し，T は固定時刻，F_T は試験汎関数 (有界 $\mathcal{F}_T$-可測汎関数)，T_0 は原点到達時刻とする．極限において動かす τ は無限大に向かうランダム時刻の系であり，これを**時計 (clock)** と呼ぶこととする．

McKean ([6],1962) は一般の一次元拡散過程に対して定数時計の条件付けを考察した．Salminen–Vallois–Yor [7] は到達時刻時計の場合を調べている．論文 [10] では指数時計の場合を調べた．本稿ではこれらの結果をまとめる．

なお，本稿では触れないが，Knight ([4],1969) は片側反射壁および両側反射壁のブラウン運動に対して定数時計および逆局所時間時計の条件付けを調べている．片側反射壁の場合は極限過程はいずれの時計でも同じ (3 次元ベッセル過程) であるのに対し，両側反射壁の場合は極限過程が異なる．また，一次元レヴィ過程の場合に原点到達時刻 T_0 をレベル 0 通過時刻 T_0^+ に取り換えた条件付けについて，Chaumont ([1],1997) は安定過程に対して定数時計の場合を，Chaumont–Doney ([2],2005) および Doney ([3],2007) は一般の一次元レヴィ過程に対して指数時計の場合を調べている．

2 一次元拡散過程

一次元拡散過程であって，左端点が regular-reflecting なものを考える．さらに，議論の単純化のため，左端点が再帰的であり，右端点が ∞ であって entrance または natural の場合のみを考える．生成作用素の Feller 標準形を $D_m D_s$ とする．但し，関数 $m:[0,\infty)\to[0,\infty)$ は狭義増加，右連続，$m(0)=0$ であるとし，$s(\infty)=\infty$ とする．右端点の状況により以下の 3 つの場合に分けられる:

(i) ∞ が type-1-natural: $\int^\infty s(x)\mathrm{d}m(x)=\infty$ かつ $m\circ s^{-1}(\infty)=\infty$;

(ii) ∞ が type-2-natural: $\int^\infty s(x)\mathrm{d}m(x)=\infty$ かつ $m\circ s^{-1}(\infty)<\infty$;

(iii) ∞ が entrance: $\int^\infty s(x)\mathrm{d}m(x)<\infty$ (必然的に $m\circ s^{-1}(\infty)<\infty$).

なお，$m(\infty)=\infty$ のとき (∞ が type-1-natural のとき)0 は零再帰的，$m(\infty)<\infty$ のとき (∞ が type-2-natural または entrance のとき)0 は正再帰的である．

スケール変換によって，natural scale，すなわち $s(x)=x$ とした過程を調べる．

典型的な例を挙げておく．
(i) $0<\alpha<1$ に対し，指数 $-\alpha$(あるいは次元 $2-2\alpha$) の片側反射壁ベッセル過程 $\widetilde{X}$ は，生成作用素が

$$\widetilde{L}f=\frac{1}{2}\left(f''-\frac{2\alpha-1}{x}f'\right)\quad \text{on } C_c((0,\infty)) \tag{2.1}$$

で特徴づけられる．その speed measure と scale function はそれぞれ

$$\widetilde{m}(x)=\frac{2}{2-2\alpha}x^{2-2\alpha},\quad \widetilde{s}(x)=\frac{1}{2\alpha}x^{2\alpha} \tag{2.2}$$

で与えられる．このとき，$X=\widetilde{s}(\widetilde{X})$ はベッセル過程 $\widetilde{X}$ と本質的に同じであり，natural scale かつ speed measure が $m=\widetilde{m}\circ\widetilde{s}^{-1}$ で与えられる．この場合，

$$\int^{\infty}x\mathrm{d}m(x)=\int^{\infty}\widetilde{s}(x)\mathrm{d}\widetilde{m}(x)=\infty \tag{2.3}$$

であるから，∞ は type-1-natural である．
(ii) 定数 $c>0$ と $0<\nu\le 2$ に対し，生成作用素が

$$\widetilde{L}f=\frac{1}{2}(f''-c\nu x^{\nu-1}f')\quad \text{on } C_c((0,\infty)) \tag{2.4}$$

で特徴づけられる一次元拡散過程 $\widetilde{X}$ を考える．このとき

$$\widetilde{m}(x)=2\int_0^x \mathrm{e}^{-cy^{\nu}}\mathrm{d}y,\quad \widetilde{s}(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{cy^{\nu}}\mathrm{d}y \tag{2.5}$$

であり，$X=\widetilde{s}(\widetilde{X})$ は natural scale かつ speed measure が $m=\widetilde{m}\circ\widetilde{s}^{-1}$ で与えられる．この場合，簡単な計算により，∞ は type-2-natural であることがわかる．
(iii) 上で $\nu>2$ とすると，∞ は entrance である．

3 原点回避条件付け

定数時計，到達時刻時計，指数時計における結果を述べる．

定理 3.1 (McKean [6]，定数時計の場合).

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{P}_x[F_T;T_0>t]}{\mathbb{P}_x(T_0>t)}=\mathbb{P}_x^0\left[F_T\mathrm{e}^{-\gamma_* t}\frac{h_*(X_t)}{h_*(x)}\right]. \tag{3.1}$$

但し，$\mathbb{P}^0_x$ は原点停止過程であり，

$$\begin{cases} X \text{ に対する } \infty \text{ が type-1,2-natural のとき，} \gamma_* = 0,\ h_*(x) = x, \\ X \text{ に対する } \infty \text{ が entrance のとき，} \gamma_* = \gamma_1,\ h_* = f_1. \end{cases}$$

ここで，entrance の場合の γ_1 と f_1 は，原点停止過程の resolvent 作用素に対する L^2 固有関数展開に現れる:

$$G^0_q = \sum_{n=1}^{\infty} (q - \gamma_n)^{-1} f_n \otimes f_n \quad (0 > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots). \tag{3.2}$$

定理 3.2 (Salminen–Vallois–Yor [7]，到達時刻時計の場合).

$$\lim_{a \to \infty} \frac{\mathbb{P}_x[F_T; T_0 > T_a > T]}{\mathbb{P}_x(T_0 > T_a)} = \mathbb{P}^0_x \left[F_T \frac{X_T}{x} \right]. \tag{3.3}$$

但し，T_a は a への到達時刻.

定理 3.3 (YY [10], 指数時計の場合).

$$\lim_{q \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}_x[F_T; T_0 > \boldsymbol{e}_q > T]}{\mathbb{P}_x(T_0 > \boldsymbol{e}_q)} = \mathbb{P}^0_x \left[F_T \frac{h_0(X_T)}{h_0(x)} \right]. \tag{3.4}$$

但し，$\boldsymbol{e}_q$ は過程と独立なパラメタ q の指数時刻を表す．また，

$$\begin{cases} X \text{ に対する } \infty \text{ が type-1-natural のとき，} h_0(x) = x, \\ X \text{ に対する } \infty \text{ が type-2-natural または entrance のとき，} h_0(x) = x - \frac{1}{m(\infty)} \int_0^x m(y) \mathrm{d}y. \end{cases}$$

X に対する 0 が零再帰的の場合，すなわち type-1-natural の場合は，いずれの時計においても極限過程は共通である．そうでない場合は極限過程にバリエーションがある．

4 h-変換

原点回避条件付けの極限過程はいずれも h-変換で記述されている．この節では h-変換の性質を論ずる．関数 h に対する h-変換を X^h と記す．

定理 4.1. X^{h_*} に対する 0 は entrance．また，X^{h_*} に対する ∞ は

$$\begin{cases} \text{type-3-natural} & (X \text{ に対する } \infty \text{ が type-1,2-natural}), \\ \text{entrance} & (X \text{ に対する } \infty \text{ が entrance}). \end{cases}$$

但し，∞ が type-3-natural とは，∞ が natural かつ scale function が ∞ で有界であることを言う．

定理 4.2. X^s に対する 0 は entrance．また，X^s に対する ∞ は

$$\begin{cases} \text{type-3-natural} & (X \text{ に対する } \infty \text{ が type-1,2-natural}), \\ \text{exit} & (X \text{ に対する } \infty \text{ が entrance かつ } \int^\infty x^2 \mathrm{d}m(x) = \infty), \\ \text{regular-absorbing} & (X \text{ に対する } \infty \text{ が entrance かつ } \int^\infty x^2 \mathrm{d}m(x) < \infty). \end{cases}$$

また，X^s は内部消滅を持たず，∞ においてのみ消滅する．

定理 4.3. X^{h_0} に対する 0 は entrance．また，X^{h_0} に対する ∞ は

$$\begin{cases} \text{type-3-natural} & (X \text{ に対する } \infty \text{ が type-1-natural}), \\ \text{natural} & (X \text{ に対する } \infty \text{ が type-2-natural}), \\ \text{entrance} & (X \text{ に対する } \infty \text{ が entrance}). \end{cases}$$

また，X^{h_0} は内部消滅を持ち，生成作用素は

$$L^{h_0} = D_{m^{h_0}} D_{s^{h_0}} - \frac{\pi_0}{h_0} \quad \text{on } C_c((0,\infty)) \tag{4.1}$$

で特徴づけられる．但し，$\pi_0 = 1/m(\infty)$ とした．

注 4.4. h-変換の境界分類についての一般論が，[5], [9], [8] において論ぜられている．

参考文献

[1] L. Chaumont. Excursion normalisée, méandre et pont pour les processus de Lévy stables. *Bull. Sci. Math.*, 121(5):377–403, 1997.

[2] L. Chaumont and R. A. Doney. On Lévy processes conditioned to stay positive. *Electron. J. Probab.*, 10:no. 28, 948–961, 2005.

[3] R. A. Doney. *Fluctuation theory for Lévy processes*, volume 1897 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007. Lectures from the 35th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–23, 2005, Edited and with a foreword by Jean Picard.

[4] F. B. Knight. Brownian local times and taboo processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 143:173–185, 1969.

[5] M. Maeno. One-dimensional h-path generalized diffusion processes. *Annual reports of Graduate School of Humanities and Sciences, Nara Women's University*, 21:167–185, 2006.

[6] H. P. McKean, Jr. Excursions of a non-singular diffusion. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 1:230–239, 1962/1963.

[7] P. Salminen, P. Vallois, and M. Yor. On the excursion theory for linear diffusions. *Jpn. J. Math.*, 2(1):97–127, 2007.

[8] T. Takemura. State of boundaries for harmonic transforms of one-dimensional generalized diffusion processes. *Annual reports of Graduate School of Humanities and Sciences, Nara Women's University*, 25:285–294, 2010.

[9] M. Tomisaki. Intrinsic ultracontractivity and small perturbation for one-dimensional generalized diffusion operators. *J. Funct. Anal.*, 251(1):289–324, 2007.

[10] K. Yano and Y. Yano. On h-transforms of one-dimensional diffusions stopped upon hitting zero. To appear in Séminaire de Probabilités. arXiv:1409.3112.